TD numéro 1

Exercice 1. Décrire (comme ensembles) les spectres d'anneaux ci-dessous :

1. Spec(A) lorsque A est un anneau principal (i.e un anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux).
2. Spec($\mathbb{R}[T]$) et Spec($\mathbb{Z}[i]$).
3. Spec($k[[T]]$) pour k un corps quelconque.

Exercice 2.

Rappels :

- On dit qu'une algèbre sur un corps k est *de type fini* si elle est engendrée par un nombre fini d'éléments sur k.
- On dit qu'un module sur un anneau A est *de type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments sur A.
- Si A et B sont deux algèbres sur un corps k, on dit que B est *finie* sur A s'il existe un morphisme de $k-$algèbres $\phi : A \to B$ munissant B d'une structure de $A-$module de type fini.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de normalisation de Noether :

Théorème 1 *Si k est un corps et A une $k-$algèbre de type fini non nulle, il existe un entier $d \geqslant 0$ et un morphisme injectif de $k[T_1, ..., T_d]$ dans A tel que A est fini sur $k[T_1, ..., T_d]$.*

Par hypothèse, on a que $A = k[X_1, ..., X_n]/I$ où I est un idéal non nul. Si $n = 0$ ou $I = 0$ le résultat est immédiat. Nous supposerons donc $n \geqslant 1$ et $I \neq 0$. Soit $P \in I \setminus \{0\}$.

1. Montrer qu'il existe $m = (m_1, ..., m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tel que si $S_i = X_i - X_n^{m_i}$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, $P(X)$ est de la forme :
$$P(X) = \alpha X_n^e + Q_1(S) X_n^{e-1} + ... + Q_e(S),$$
où $X = (X_1, ..., X_n)$, $S = (S_1, ..., S_{n-1})$, $\alpha \in k^*$ et $e \geqslant 1$.
2. Montrer qu'il existe un morphisme fini injectif de $k[S]/J$ dans A, pour $J = k[S] \cap I$.
3. Conclure.

Exercice 3. En utilisant le théorème de normalisation de Noether, démontrer les résultats ci-dessous :

1. Si A est une $k-$algèbre de type fini et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, alors $A/\mathfrak{m}$ est une extention algébrique finie de k.
2. Si k est un corps algébriquement clos, les idéaux maximaux de $k[X_1, ..., X_n]$ sont les idéaux (distincts) engendrés par $X - \alpha_1, ..., X - \alpha_n$ pour $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in k^n$.
3. Si k est un corps algébriquement clos, et si $A = k[X_1, ..., X_n]/I$ est une $k-$algèbre de type fini, alors il existe une bijection entre les points fermés de Spec(A) et l'ensemble :
$$Z(I) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in k^n \mid \forall P \in I,\ P(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0\}.$$

Exercice 4. Soit A un anneau. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Spec}(A)$ n'est pas connexe,
2. il existe des éléments non nuls $e_1, e_2 \in A$ tels que $e_1 e_2 = 0,\ e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2,\ e_1 + e_2 = 1$,
3. A est isomorphe à un produit direct de deux anneaux non nuls.

Exercice 5. Soit $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$, où $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels. L'objectif de cet exercice est de décrire $\mathrm{Spec}(A)$. Nous noterons x, y les images de X, Y dans A.

1. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + ax + b \in \mathfrak{m}$ et $y^2 + cy + d \in \mathfrak{m}$. Montrer que $\mathfrak{m}$ contient un élément de la forme $f = \alpha x + \beta y + \gamma$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. En déduire que $\mathfrak{m} = fA$.
2. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non maximal. Montrer que le morphisme canonique de $\mathbb{R}[X]$ dans A est fini et injectif. En déduire que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[X] = 0$. Soit $g \in \mathfrak{p}$ vérifiant une équation $g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ pour $a_i \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $a_0 = 0$ et en déduire que $\mathfrak{p} = 0$.

Exercice 6. *Rappels sur la localisation :* Si A est un anneau et S une partie multiplicative de A (i.e un sous-ensemble de A contenant 1 et stable pour la multiplication), on définit l'anneau $S^{-1}A$ dont les éléments sont notés formellement a/s pour $a \in A,\ s \in S$ et vérifient $a_1/s_1 = a_2/s_2$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tels que $s(s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0$. On note

$$(a_1/s_1) + (a_2/s_2) = (s_2 a_1 + s_1 a_2)/(s_1 s_2)$$

$$(a_1/s_1) \times (a_2/s_2) = (a_1 a_2)/(s_1 s_2).$$

L'application $a \mapsto a/1$ définit une application canonique $A \to S^{-1}A$.
Si $S = (1, f, f^2, \ldots)$ pour $f \in A$, on note A_f pour $S^{-1}A$.
Si $S = A \setminus \mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, on note $A_\mathfrak{p}$ pour $S^{-1}A$.

1. Que représente $S^{-1}A$ lorsque A est intègre et $S = A \setminus \{0\}$?
2. Montrer que l'application canonique $A \to S^{-1}A$ est injective si et seulement si S ne contient aucun diviseur de 0.
3. Si k est un corps, décrire l'ensemble $\mathrm{Spec}(k[X]_{(X)})$.
4. Soient A un anneau et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Alors, les idéaux premiers dans $\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})$ sont en bijection avec les idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$.
5. Soient A un anneau et $f \in A$. Les idéaux premiers de $\mathrm{Spec}(A_f)$ sont en bijection avec les idéaux premiers de A ne contenant pas f.